PEMBENTUKAN IDEAL MAKSIMAL GELANGGANG POLINOM MIRING MENGGUNAKAN IDEAL GELANGGANG TUMPUANNYA

Amir Kamal Amir
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar

amirkamalamir@yahoo.com

ABSTRAK. Gelanggang polinom miring atas gelanggang R dengan variabel x adalah gelanggang: $R[x;\sigma,\delta]=\{f(x)=a_n x^n+\cdots+a_0|a_i\in R\}$ dengan $xa=\sigma(a)x+\delta(a)$, untuk setiap $a\in R$, dengan σ dan δ berturut-turut adalah suatu endomorfisma dan suatu σ-derivatif. Operasi perkalian dalam gelanggang polinom miring yang melibatkan σ dan δ telah mempengaruhi bentuk ideal, khusunya ideal prim, dari gelanggang tersebut. Peran σ dan δ juga mempengaruhi bentuk keterkaitan antara ideal gelanggang tumpuan R dengan ideal gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$. Dalam paper ini, akan dicari bentuk ideal gelanggang tumpuan R yang dapat dikembangkan menjadi ideal maksimal gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$.

Kata Kunci: gelanggang, ideal, konstan, maksimal, polinom

I. PENDAHULUAN

I.1. Latar Belakang

Gelanggang polinom miring adalah gelanggang yang terdiri dari polinom-polinom dengan koefisien dalam gelanggang R dengan peubah x dan perkalian antara polinom-polinom tidak komutatif. Gelanggang R yang digunakan ini biasanya disebut gelanggang tumpuan dari gelanggang polinom miring. Penelitian ini menggunakan daerah Dedekind sebagai gelanggang tumpuan.

Pemilihan daerah Dedekind sebagai gelanggang tumpuan, menjadikan penelitian ini salah satu kontributor dalam teori gelanggang polinom miring, mengingat daerah Dedekind sudah mencakup beberapa jenis gelanggang tumpuan yang telah digunakan oleh sejumlah peneliti sebelumnya. Sebut saja misalnya Irving (1979) dan Goodearl (1992) menggunakan gelanggang Noether sebagai gelanggang tumpuan. McConnel dan Robson (1987) menuliskan beberapa hasil penelitian tentang gelanggang polinom miring menggunakan gelanggang prima, gelanggang Noether, dan daerah integral (domain) sebagai gelanggang tumpuan. Pada kesempatan lain, Cortes dan Ferrero (2004) juga menggunakan gelanggang prima sebagai gelanggang tumpuan.

Pada sisi lain, ideal dari gelanggang memegang peranan penting dalam pengkajian struktur dari gelanggang tersebut. Untuk gelanggang polinom miring, beberapa peneliti meneliti struktur gelanggang memalui ideal primanya. Misalnya, Wang, Amir, dan Marubayashi [12] dan Amir, Marubayashi, Astuti, dan Muchtadi-Alamsyah [1].

Pada paper ini akan dibentuk ideal maksimal dari gelanggang polinom miring dengan gelanggang tumpuan daerah Dedekind. Proses ini dimulai dengan mencari ideal prim gelanggang tumpuan yang dapat dikembangkan menjadi dieal maksimal.

II. HASIL DAN PEMBAHASAN

II.1. Beberapa Pengertian dan Notasi

II.1.1 Daerah Dedekind

Pembahasan daerah Dedekind membutuhkan pengertian tentang unsur integral dan integral atas. Oleh karena itu, sebelum pembahasan mengenai daerah Dedekind terlebih dahulu disajikan pengertian-pengertian tersebut.

Misalkan R dan S gelanggang dengan R subgelanggang dari S. Unsur s di S dikatakan **integral atas** R jika terdapat polinom monik $f(x)$ di $R[x]$ sehingga $f(s) = 0$. Pengertian integral tersebut diperluas untuk setiap unsur s di S. Gelanggang R dikatakan **tertutup secara integral** di S jika untuk setiap unsur s di S yang integral atas R berlaku s di R. Sebagai contoh, gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}$ tertutup secara integral pada gelanggang bilangan rasional $\mathbb{Q}$.

Menggunakan pengertian tertutup secara integral, daerah Dedekind didefinisikan sebagai berikut.

Definition 1 [Passman, 1991] *Daerah integral D dengan gelanggang hasil bagi Q dikatakan suatu **daerah Dedekind** jika memenuhi:*

1. D merupakan gelanggang Noether.
2. D tertutup secara integral di Q.
3. Setiap ideal prima tak nol dari D adalah ideal maksimal.

Daerah integral $\mathbb{Z}$ dengan lapangan hasil bagi $\mathbb{Q}$ adalah daerah Dedekind. Contoh lain daerah Dedekind adalah daerah ideal utama.

Beberapa karakteristik dari daerah Dedekind yang terkait dengan ideal-idealnya disajikan pada teorema berikut.

Theorem 1 [Hungerford, 1974] *Kondisi berikut ini dalam daerah integral D saling ekuivalen.*

1. D daerah Dedekind
2. Setiap ideal sejati di D merupakan perkalian tunggal dari terhingga banyak ideal-idel prima.
3. Setiap ideal taknol di D terbalikan.
4. Setiap ideal fraksional dari D terbalikan.
5. Himpunan ideal fraksional dari D membentuk grup terhadap perkalian.
6. Setiap ideal di D merupakan ideal projektif

Menurut Teorema 1, setiap ideal sejati di D merupakan perkalian tunggal dari terhingga banyak ideal-ideal prima. Berdasarkan pernyataan ini, diperoleh jenis keterkaitan antara satu ideal prima dengan ideal prima yang lain, seperti yang dinyatakan dalam lema berikut.

Theorem 2 [Osserman, 2008] *Misalkan $P, P_1, P_2, \ldots, P_n$ adalah ideal-ideal prima dalam suatu daerah Dedekind. Jika $P \supseteq P_1 P_2 \ldots P_n$, maka $P = P_i$ untuk suatu i.*

II.1.2. Gelanggang Polinom Miring

Gelanggang polinom miring adalah gelanggang yang terdiri dari polinom-polinom atas suatu gelanggang R dalam peubah x. Setiap polinom dalam gelanggang polinom miring dapat diekspresikan dalam bentuk tunggal sebagai $\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ dengan $a_i \in R$. Proses perkalian antar polinom melibatkan satu endomorfisma, disimbol σ, gelanggang dan satu σ-derivatif, disimbol δ, gelanggang.

Gelanggang R yang digunakan ini biasanya disebut gelanggang tumpuan dari gelanggang polinom miring. Gelanggang tumpuan yang digunakan dalam penelitian ini adalah daerah Dedekind yang dilambangkan dengan D. Oleh karena itu, dalam pembahasan gelanggang polinom miring selanjutnya digunakan simbol D untuk gelanggang tumpuan.

Definition 2.1 [McConnel dan Robson, 1987] *Misalkan* $(D,+,.)$ *adalah suatu gelanggang dan* σ *adalah suatu endomorfisma gelanggang dari gelanggang* $(D,+,.)$. *Suatu pemetaan* δ *dari gelanggang* $(D,+,.)$ *ke* $(D,+,.)$ *adalah suatu* σ*-derivatif jika:*

(i). δ adalah suatu endomorfisma grup pada grup penjumlahan $(D,+)$.

(ii). $\delta(ab) = \sigma(a)\,\delta(b) + \delta(a)b$ untuk setiap $a,b \in D$.

Lebih lanjut, δ disebut **inner** σ-derivatif, jika terdapat $a \in D$ sehingga $\delta = \delta_a$ dengan δ_a adalah σ-derivatif yang memenuhi $\delta_a(b) = ab - \sigma(b)a$ untuk semua $b \in D$.

Pengertian σ dan δ yang digunakan pada definisi berikut adalah σ dan δ yang diberikan pada definisi 2.1.

Definition 2.2 [McConnel dan Robson, 1987] *Misalkan* D *adalah suatu gelanggang dengan identitas* 1, σ *adalah suatu endomorfisma dari* D, *dan* δ *adalah suatu* σ*-derivatif.*

Gelanggang polinom miring atas D dengan variabel x adalah gelanggang:

$$D[x;\sigma,\delta] = \{ f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \mid a_i \in D \}$$

dengan $xa = \sigma(a)x + \delta(a), \forall a \in D$.

Untuk $\delta = 0$ gelanggang polinom miring $D[x;\sigma,\delta]$ cukup ditulis $D[x;\sigma]$. Jika σ merupakan suatu automorfisma dan $\delta = 0$, gelanggang seperti ini disebut gelanggang polinom miring tipe automorfisma. Sedangkan untuk $\sigma = 1$ (σ adalah pemetaan identitas) gelanggang polinom miring cukup ditulis $D[x;\delta]$ dan biasa disebut gelanggang polinom miring tipe derivatif. Untuk, $\sigma = 1$ dan $\delta = 0$, gelanggang ini merupakan gelanggang polinom biasa.

Untuk mempermudah memahami pengertian gelanggang polinom yang diberikan pada definisi di atas, berikut disajikan contoh.

Contoh 2.1 Misalkan $D = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$. Automorfisma σ pada R didefinisikan sebagai $\sigma(a + b\sqrt{-5}) = a - b\sqrt{-5}$, untuk setiap $a + b\sqrt{-5} \in D$. Pemetaan δ didefinisikan sebagai $\delta(a + b\sqrt{-5}) = b$, untuk setiap $a + b\sqrt{-5} \in D$. Pemetaan δ yang didefinisikan seperti ini memenuhi syarat σ-derivatif. Dengan demikian, $D[x;\sigma,\delta]$ merupakan suatu gelanggang polinom miring. Selanjutnya, dapat diperiksa bahwa gelanggang polinom ini tidak bersifat komutatif.

Selanjutnya diperkenalkan konsep-konsep σ-ideal, δ-ideal, (σ,δ)-ideal, σ-ideal prima, δ-ideal prima, dan (σ,δ)-ideal prima di D. Konsep-konsep ini dipakai untuk menjelaskan hubungan antara ideal-ideal di D dan ideal-ideal prima di gelanggang polinom miring $R = D[x;\sigma,\delta]$.

Definition 2.3 [Goodearl, 1992] *Misalkan Σ adalah suatu himpunan pemetaan-pemetaan dari gelanggang D ke dirinya sendiri. Suatu ideal I dari D dikatakan Σ-ideal jika $\varphi(I) \subseteq I$ untuk setiap pemetaan $\varphi \in \Sigma$. Suatu Σ-ideal sejati I sehingga ketika J, K adalah Σ-ideal yang memenuhi $JK \subseteq I$, maka $J \subseteq I$ atau $K \subseteq I$ disebut Σ-ideal prima.*

Dalam konteks gelanggang D bersama pasangan endomorfisma dan derivatif (σ,δ), definisi di atas digunakan untuk kasus-kasus $\Sigma = \{\sigma\}, \Sigma = \{\delta\}$ atau $\Sigma = \{\sigma,\delta\}$. Selanjutnya, penulisan bentuk Σ disederhanakan menjadi σ, δ, atau (σ,δ).

Keterkaitan antara ideal prima dengan σ-ideal prima diberikan pada lema-lema berikut.

Theorem 3 [Goodearl, 1992] *Misalkan σ adalah automorfisma pada gelanggang R dan I adalah σ-ideal di R. Jika R adalah gelanggang Noether, maka $\sigma(I) = I$.*

Theorem 4 [Goodearl, 1992] *Misalkan σ adalah automorfisma pada gelanggang Noether R dan I adalah σ-ideal di R. Maka I adalah σ-ideal prima jika dan hanya jika terdapat ideal prima P yang memuat I dan bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $\sigma^{n+1}(P) = P$ dan $I = P \cap \sigma(P) \cap \dots \cap \sigma^n(P)$.*

II.2. Hasil-hasil

Dalam sub bagian ini disajikan hasil-hasil penelitian.

Theorem 5 *Misalkan σ adalah automorfisma pada daerah Dedekind D dan ideal tidak prima $\mathfrak{p}$ adalah σ-ideal di D, maka terdapat ideal prima $\mathfrak{m}$ di D yang memenuhi $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}$ dan $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{p}$.*

Bukti: Untuk kondisi seperti yang ada pada lema ini, maka berdasarkan Lema 4 terdapat ideal prima $\mathfrak{m}$ yang memuat $\mathfrak{p}$ dan bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $\sigma^{n+1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$ dan $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap \sigma(\mathfrak{m}) \cap \dots \cap \sigma^n(\mathfrak{m})$. Hal ini berarti

$$\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{m}\sigma(\mathfrak{m}) \dots \sigma^n(\mathfrak{m}).$$

…..

Theorem 6 *Misalkan $R = D[x;\sigma]$ dengan D adalah daerah Dedekind, σ adalah automorfisma, dan δ adalah σ −derivatif. Misalkan P adalah suatu ideal prima minimal dari R dengan $P = \mathfrak{p}[x;\sigma]$ dan $\mathfrak{p}$ adalah σ-ideal prima dari D tetapi bukan ideal prima. Jika $\mathfrak{m}$ adalah ideal maksimal yang memuat $\mathfrak{p}$, dengan $\sigma(\mathfrak{m}) \neq \mathfrak{m}$, maka $M = \mathfrak{m} + xR$ adalah ideal maksimal di R dan $M = M^2 + P$.*

Bukti: Misalkan N ideal di R dan $M \subsetneq N$, berarti terdapat $a(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in N$ tetapi $a(x) \notin M$. …..

III. KESIMPULAN

Misalkan $\mathfrak{p}$ adalah ideal tidak prima $\mathfrak{p}$ yang merupakan σ-ideal di daerah Dedekind D, maka dapat dipilih ideal prima $\mathfrak{m}$ di D yang memenuhi $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}$ dan $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{p}$. Selanjutnya, ideal prim $\mathfrak{m}$ dapat dikembangkan membentuk ideal maksimal M di gelanggang polinom miring $R = D[x;\sigma]$. Dalam hal ini, $M = \mathfrak{m} + xR$.

IV. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Prof. Pudji Astuti, Dr. Intan Muchtadi-Alamsyah, Prof. Irawati, dan Prof. Hidetoshi Marubayashi untuk berbagai variasi diskusi dalam mempelajari gelanggang polinom miring.

V. DAFTAR PUSTAKA

[1] A.K. Amir, H. Marubayashi, P. Astuti, dan I. Muchtadi-Alamsyah, *Corrigendum to Minimal Prime Ideals of Ore Extension over Commutative Dedekind Domain and Application*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, 21(1), 44-48, (2011).

[2] W. Cortes dan M. Ferrero, *Principal Ideals in Ore Extensions*, Math. J. Okayama Univ., 46, 77-84.

[3] K.R. Goodearl, *Prieme ideals in skew polinomial ring and quantized Weyl algebras*, J. of Algebra 150, (1992), 324-377.

[4] K.R. Goodearl, R.B. Warfield, JR *An Introduction to Noncommutative Noetherian rings*, London Mathematical Society Student Text, 16 (1989).

[5] T.W. Hungeford, *Algebra*, Springer-Verlag, New York, (1974).

[6] R.S. Irving, *Prime Ideals of Ore Extension over Commutative Rings*, Journal of Algebra, 56, 315-342, (1979).

[7] R.S. Irving, *Prime Ideals of Ore Extension over Commutative Rings II*, Journal of Algebra, 5(8), 399-423, (1979).

[8] J.C. McConnell and J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, Wiley-Interscience, New York, (1987).,

[9] B. Osserman, *Algebraic Number Theory*, Lecture Note, Dept. of Mathematics, University California, (2008).

[10] D.S. Passman, A Course in Ring Theory, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, California, (1991).

[11] Y. Wang, A.K. Amir, dan H. Marubayashi, *Prime Factor Rings of Skew Polynomial Rings over a Commutative Dedekind Domain*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, (to appear).